Козырева И В

## Обозначения, определения и содержательная постановка задачи подведения итогов голосования

Члены органа управления – выборщики должны выбрать один из альтернативных вариантов (выборы президента, победителя конкурса, выбор проекта и т.п.).

Выборщики могут объединяться в коалиции, причем сами выборщики могут иметь различные возможности (например председатель может иметь несколько голосов). Кроме того, возможны различные способы подведения итогов голосования.

Определения:

Множество всех выборщиков Q называется универсальным.

Коалиция выборщиков называется выигрывающей, если члены коалиции могут обеспечить победу необходимого им решения независимо от мнения всех остальных выборщиков.

Если выборщики, не входящие в рассматриваемую коалицию, могут провести свое решение вопреки желанию членов коалиции, то она (коалиция) называется проигрывающей.

Если члены коалиции не могут провести свое решение и, одновременно, остальные выборщики не могут провести другое решение, то коалиция называется блокирующей.

Пусть А – выигрывающая коалиция. Тогда ее дополнение Q\А – проигрывающая коалиция. Если ни В, ни Q\В не являются выигрывающими коалициями, то В – блокирующая коалиция.

**Пример 1:** |Q| =8, каждый выборщик имеет один голос. Тогда коалиция А, такая, что |A| ≥5, является выигрывающей;

∀ Т: |T| ≤ 3, - проигрывающие коалиции;

∀ В: |В| = 4, - блокирующие коалиции.

Если же один из выборщиков (председатель) обладает правом решающего голоса в случае равного числа голосов в двух группах, то любая коалиция из 4-х выборщиков, в которой участвует председатель, является выигрывающей, а аналогичная коалиция без председателя – проигрывающей. Доказать самостоятельно, что в этом случае отсутствует блокирующая коалиция.

Если А – выигрывающая коалиция, то D такое, что A⊂ D, тоже выигрывающая коалиция.

Минимальная выигрывающая коалиция А такова, что любая коалиция С⊂ А не является выигрывающей.

Если выборщик может провести свое решение независимо от мнения остальных, то он называется диктатором.

Если выборщик не входит ни в одну минимальную выигрывающую коалицию, то он называется бесправным.

Если выборщик не может провести свое решение, но может блокировать любое другое, то он называется обладающим правом вето.

## Традиционные способы подведения итогов голосования

Пусть каждый i-ый выборщик вводит свое отношение порядка на множестве альтернатив. Так для трех альтернатив a, b, c выражение:



означает, что i-ый выборщик считает, что "а" лучше, чем "b", а "b" лучше, чем "с".

Пусть теперь универсальное множество Q таково, что |Q| =13, причем все выборщики имеют по одному голосу. Результаты упорядочения таковы:



Таблица голосования имеет вид:

Табл. 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Количество голосов | | | |
| *2* | *3* | *4* | *4* |
| *a* | *c* | *a* | *b* |
| *b* | *b* | *c* | *c* |
| *c* | *a* | *b* | *a* |

2.1. Правило относительного большинства: побеждает решение, получившее наибольшее число голосов.

Тогда: "а" – 6 голосов против "b" – 4 голоса и "с" – 3 голоса.

Побеждает " а ".

2.2. Правило абсолютного большинства голосов: побеждает решение, набравшее больше половины голосов. Если такого нет, то проводится 2й тур, в котором голосование проводится по двум решениям, набравшим наибольшее число голосов в предыдущем туре.

Т.к. в 1м туре по Табл. 1. не победило ни одно решение, то для 2го тура выбираются "а" и "b". Вычеркивая "с", получим след таблицу:

Табл. 2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Количество голосов | | | |
| *2* | *3* | *4* | *4* |
| *a* | *b* | *a* | *b* |
| *b* | *a* | *b* | *a* |

Во втором туре побеждает " b " – 7 голосов против 6-ти за "а".

2..3. Правило минимальной суммы мест: каждый выборщик дает j очков решению, поставленному на j-ое место. Побеждает решение, набравшее минимальную сумму (гимнастика, фигурное катание).

Возвращаясь к таблице 4.1.:

*na=1·6+3·7=27;*

*nb=1·4+2·5+3·4=26;*

*nc=1·3+2·8+3·2=25;*

Побеждает " с ", на втором месте "b", на третьем – "a".

Пусть теперь имеется 4 альтернативы, упорядоченные в таблице 3.

*.*

Табл. 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| количество голосов | *2* | *а* | *b* | *c* | *d* |
| *3* | *с* | *a* | *d* | *b* |

Побеждает "а" с суммой 8;

На втором месте "с" с суммой 9.

## Парадоксы снятия с голосования

### Правило абсолютного большинства

Если после 1го тура выборщики снимают с голосования решение "a", как не имеющее шансов на выигрыш, то получаем таблицу 4:

Табл. 4.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Количество голосов | | | |
| *2* | *3* | *4* | *4* |
| *b* | *c* | *c* | *b* |
| *c* | *b* | *b* | *c* |

Побеждает " с " – 7 голосов; против 6 – за "b".

### Аксиомы Эрроу

В 1951 году Кеннет Эрроу из Стенфордского университета выдвинул пять аксиом, которым должна удовлетворять любая демократическая система голосования. Они приводятся ниже:

Аксиома 1. (Аксиома полноты).

Для двух любых альтернатив "a" и "b" коллективный порядок устанавливает одно из трех отношений:



Аксиома 2. (Аксиома транзитивности).



Аксиома 3 (Аксиома единогласия).

Если все выборщики считают, что a  b, то и в коллективном порядке a  b.

Аксиома 4 (Аксиома независимости)

Положение любых двух альтернатив в коллективном порядке зависит только от их взаимного расположения в индивидуальных порядках выборщиков и не зависит от расположения других альтернативных решений.

Аксиома 4 позволяет исключить манипулирование итогами за счет снятия с голосования отдельных альтернатив.

Аксиома 5. Необходимо, чтобы система голосования была действенной при любых предпочтениях избирателей – аксиома универсальности.

Отсюда следует парадоксальная теорема, доказанная Эрроу:

**Теорема Эрроу**

Единственным правилом подведением итогов голосования, не противоречащим аксиомам 1-5, является правило диктатора.

Следует отметить, что, если множество альтернатив состоит из 2х элементов изначально, то все противоречия и парадоксы снимаются.

## Анализ стратегии голосования с помощью дерева вариантов

### Исходные условия

Пусть выполняются следующие правила голосования:

1. Голосование является открытым.
2. На каждой итерации может сниматься с голосования:
3. тот претендент, кто набрал наименьшее число голосов;
4. тот претендент, которого убирает "своя" коалиция.

3) Реализуется один из вариантов: a) либо b).

Далее рассмотрен пример, в котором расстановка сил и предпочтения коалиций отображаются ниже таблицей 4.5.

Табл. 4.5.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | *- Номер коалиции* |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 2 | *- Число членов коалиции* |
| a | b | d | a | c | *альтернативы упорядочены в порядке убывания приоритетов* |
| b | c | b | c | d |
| c | a | c | b | b |
| d | d | a | d | a |

Каждая коалиция может реализовать одну из трех стратегий поведения в каждом туре выборов (на каждой итерации): а) выступить самостоятельно; б) объединиться с другой коалицией, если упорядочения альтернатив у них совпадает; в) снять с голосования “своего” кандидата. Комбинируя эти стратегии на каждом туре голосования, можно построить дерево вариантов, анализ которого позволяет выборщикам определить оптимальные стратегии.

*Победители*

*b a b c a c b c b c b b*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | - Номер коалиции |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 2 | - Число членов коалиции |
| a | b | d | a | c | альтернативы упоря  дочены в порядке  убывания приоритетов |
| b | c | b | c | d |
| c | a | c | b | b |
| d | d | a | d | a |

*1я итерация*



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *4* | *4* | *4* | *4* | *2* |
| *a* | *b* | *d* | *a* | *d* |
| *b* | *a* | *b* | *b* | *b* |
| *d* | *d* | *a* | *d* | *a* |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *4* | *4* | *4* | *4* | *2* |
| *a* | *c* | *d* | *a* | *c* |
| *c* | *a* | *c* | *c* | *d* |
| *d* | *d* | *a* | *d* | *a* |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *4* | *4* | *4* | *4* | *2* |
| *a* | *b* | *b* | *a* | *c* |
| *b* | *c* | *c* | *c* | *b* |
| *c* | *a* | *a* | *b* | *a* |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *4* | *4* | *4* | *4* | *2* |
| *b* | *b* | *d* | *c* | *c* |
| *c* | *c* | *b* | *b* | *d* |
| *d* | *d* | *c* | *d* | *b* |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *6* | *8* | *4* |
| *a* | *d* | *b* |
| *b* | *b* | *a* |
| *d* | *a* | *d* |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *8* | *4* | *4* | *2* |
| *a* | *c* | *d* | *c* |
| *c* | *a* | *c* | *d* |
| *d* | *d* | *a* | *a* |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *4* | *8* | *4* | *2* |
| *a* | *b* | *a* | *c* |
| *b* | *c* | *c* | *b* |
| *c* | *a* | *b* | *a* |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *8* | *4* | *4* | *2* |
| *b* | *d* | *c* | *c* |
| *c* | *b* | *b* | *d* |
| *d* | *c* | *d* | *b* |



*2-я итерация*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |



*12 6 12 6 8 10 14 4 12 6 10 8 12 6 10 8 8 10 14 4 12 6 12 6*

*b d a d a b c d a d c a b c c a a b c d b d b c*

*3-я итерация*

Рис. 4.1. Анализ голосования с помощью дерева вариантов.

### Дерево вариантов

На приведенном выше дереве вариантов в каждом туре голосования объединяются в одну коалиции, удовлетворяющие приведенному выше условию “б)”: упорядочения альтернатив этих коалиций совпадают.

**Выводы:**

1. Претендент "d" не может победить ни при каких условиях;
2. Выбор "с" невозможен без отзыва претендента "b" и "а" либо "d";
3. Выбор "а" возможен только при отзыве претендентов "b" и "с";

**Ирма! Следующий параграф – важнейший в Вашей выпускной работе.**

1. **Технология подведения итогов голосования, базирующаяся на эталонах**

Используемые сегодня для обработки результатов голосования различные технологии, такие, как методы абсолютного и относительного большинства [2], метод Борда [8, 9] и ряд других, не гарантируют получения однозначного результата. Так, применительно к результатам голосования, приведенным ниже в таблице 1, подведение итогов с помощью метода относительного большинства приводит к победе кандидата «а», в то время как проведение двух туров голосования с использованием метода абсолютного большинства отдаст победу претенденту «б». В модифицированном методе Борда [1, 9] каждый выборщик,

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Табл. 1. | | | | |
| Место | Голоса избирателей | | | |
| 2 | 3 | 4 | 4 |
| 1 | a | c | a | b |
| 2 | b | b | c | c |
| 3 | c | a | b | a |

присваивает кандидату, попавшему на j-е место, j баллов. Выигрывает «с», набравший минимальную сумму баллов: na = 1∙6+3∙7=27; nb =1∙4+2∙5+3∙4=26; nc=1∙3+2∙8+3∙2=25.

Вышеприведенное различие результатов, получаемых различными технологиями обработки результатов голосования, доказывает актуальность дальнейшего развития технологий такого рода. Ниже приводится новая технология обработки результатов голосования, базирующаяся на применении эталонов. Простота этой технологии объясняется простотой определения эталона – ему соответствует случай, когда все выборщики голосуют за одного претендента. Пусть существует “n” мест на которые претендуют “m” кандидатов, причем каждому k-му кандидату соответствует вектор  число голосов, поданных за то, чтобы k-й кандидат занял j-е место. В этом случае справедливы равенства:



где “w” – общее число голосов. Очевидно, что эталону соответствует вектор vs = {w, 0, 0,…., 0}. Применительно к Табл. 1 он равен: vs = {13,0,0}. Победителем является q-й претендент, удовлетворяющий системе:



Поиск решения системы (6) можно интерпретировать, как выбор точки “q”, расположенной ближе всего к эталону в n-мерном евклидовом пространстве. Возвращаясь к Табл.1 легко убедиться, что в соответствии с (12) победителем является “a”.

Литература.

1. Дж. Фон Нейман, О. Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.
2. Давыдов Е.Г. Модели и методы теории антагонистических игр. Изд МГУ, 1978, 208 с.
3. В.О. Гроппен. Принципы принятия решений с помощью эталонов. АиТ, №4, 2006, с. 167 – 184.
4. Будаева А.А., Гроппен В.О. Выбор оптимальной технологии ранжирования. Устойчивое развитие горных территорий, № 3, 2014, с. 3 – 7.
5. В.Н. Бурков, В.О. Гроппен. Решение задачи о минимальном разрезе в бисвязном орграфе алгоритмами типа ветвей и границ. ‘’Автоматика и телемеханика’’ N 9, 1974г.
6. Groppen V.O. New Solution Principle for Multi-criteria Problems Based on Comparison Standards: Models, Algorithms, Applications // Applications to Industrial and Societal Problems. *CIMNE,* Barcelona, Spain, 2008, p. 201 - 209.
7. Groppen V.O. New Solution Principles of Multi-Criteria Problems Based on Comparison Standards, [www.arxiv.org/ftp/math/papers/0501/0501357.pdf](http://www.arxiv.org/ftp/math/papers/0501/0501357.pdf) , 2004.
8. Dresher M., Shapley L. S., Tucker A.W., Eds., Advances in Game Theory, Annals of Mathematics Study No 52, *Princeton University Press*, Princeton, New Jersey, 1964.
9. Emerson, Peter. Designing an All-Inclusive Democracy, Part 1, *Springer Verlag,* 2007,